# *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos*[1]

**Juan D. Godino**(*)
**Carmen Batanero**(*)
**Vicenç Font**(**)

Universidad de Granada (*)
Universidad de Barcelona (**)

*En este trabajo presentamos una síntesis del modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática, en cuya elaboración venimos trabajando desde hace varios años. Como rasgos característicos destacamos la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. El modelo de cognición matemática elaborado se adopta como elemento clave sobre el que basar el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa, permitiendo así mismo comparar y articular diversas aproximaciones teóricas usadas en Didáctica de las Matemáticas desde un punto de vista unificado.*

## *Introducción*

El fin específico de la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Como propuso el programa de Steiner para la Teoría de la Educación Matemática, es necesario "*el desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica*" (Steiner et al., 1984, p. 16).

Para lograr este objetivo, la Didáctica de las Matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, o la

[1] Versión ampliada del artículo, Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* Vol. 39 (1-2), 127-135.
En este trabajo realizamos una síntesis actualizada de diversas publicaciones de Godino y colaboradores donde se desarrolla un marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontológico y semiótico. Estos trabajos están disponibles en Internet, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino

sociología. Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de las instituciones escolares. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la Didáctica de las Matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en Didáctica de las Matemáticas no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

- ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?
- ¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
- ¿Las matemáticas se descubren o se inventan?
- ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?
- ¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

La emergencia relativamente reciente del área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Diversos trabajos (Ernest, 1994; Sierpinska y Lerman, 1996; Gascón, 1998; Font, 2002), cuyo objetivo ha sido realizar propuestas de organización de los diferentes programas de investigación en educación matemática, han puesto de manifiesto la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exigen aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar –utilizando la clásica terminología de Lakatos (1983)– en un verdadero programa de investigación.

Uno de los principales problemas “meta-didácticos” que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema. Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, competencias, concepciones, conceptos, representaciones internas, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc.

El progreso en el campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar la ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de instituciones escolares).

Pensamos que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo-pragmatismo, cognición individual-institucional, constructivismo-conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y la pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas.

## *Hacia un enfoque unificado del conocimiento y la instrucción matemática*

Desde hace más de 10 años estamos interesados en la problemática descrita de fundamentación de la investigación en Didáctica de las Matemáticas y nos encontramos desarrollando diversas herramientas teóricas que permitan abordar algunas de las cuestiones mencionadas. En Godino (2003, cap. 2)[2] describimos con detalle los antecedentes teóricos en los que apoyamos el sistema de nociones sobre el conocimiento matemático que proponemos para el estudio de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas herramientas se han desarrollado en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de nuestra indagación. A continuación describimos sucintamente las tres etapas y los problemas abordados en cada una de ellas.

En nuestros primeros trabajos, publicados en el periodo 1993-1998 (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998), desarrollamos y precisamos progresivamente las nociones de "*significado institucional y personal de un objeto matemático*" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización) y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En una segunda etapa (a partir de 1998) hemos considerado necesario diseñar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el elaborado hasta dicha

[2] Los trabajos citados de Godino *et al*. están disponibles en Internet, en la dirección http://www.ugr.es/local/jgodino

fecha. Esta reflexión surge del hecho de que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”.

En la primera fase proponíamos como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) “*los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas*”. Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no solo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos que desencadenan procesos interpretativos. Ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura.

Llegamos a la conclusión de que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo hemos tratado de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1965), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953). El interés por el uso de nociones semióticas en educación matemática es creciente, según se muestra en la monografía editada por Anderson *et al*. (2003) y el número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006).

Hemos tratado de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales, y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujimos en Godino y Recio (1998).

En una tercera etapa de nuestro trabajo, nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas sobre la instrucción matemática[3] (Godino, Contreras y Font, 2006). Proponemos distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones

[3] Entendida como enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos en el seno de los sistemas didácticos.

del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc., de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas)[4]. El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Los constructos teóricos elaborados durante estos tres periodos constituyen el modelo ontológico-semiótico que sintetizamos en los apartados siguientes. Dicho modelo trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Asimismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje, y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

## *Herramientas teóricas que componen el enfoque ontosemiótico*

En este apartado presentamos una síntesis de los supuestos y nociones teóricas que constituyen el Enfoque Ontosemiótico[5] (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática. En la sección 4 describimos las concordancias y complementariedades de este marco con otros modelos teóricos usados en Didáctica de las Matemáticas. En el título *Ejemplos de investigaciones* resumimos dos investigaciones que utilizan algunas de las herramientas del EOS.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

### Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

Consideramos *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica,

[4] En el subtítulo *Recapitulación* añadimos, además, la dimensión ecológica para tener en cuenta las interacciones entre los procesos de estudio y el contexto social y educativo en que tienen lugar.
[5] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento[6].

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta ¿Qué es el objeto matemático[7] *media aritmética*?, ¿qué significa o representa la expresión *media aritmética*?, se propone como respuesta que es "*el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) o las compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas, en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos*". Con esta formulación del significado, el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: "*las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción*" (Faerna, 1996; p. 14).

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados –entendidos como sistemas de prácticas– y su utilización en el análisis didáctico, lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 1 (Godino, 2003, p. 141). Con relación a los significados institucionales, proponemos tener en cuenta los siguientes tipos:

- *Implementado*: en un proceso de estudio específico, es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado*: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

---

[6] Las instituciones se conciben como "comunidades de prácticas" e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. En consecuencia se asume el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados.

[7] Inicialmente usamos la expresión "objeto matemático" como sinónimo de "concepto matemático". Más adelante extendemos su uso para indicar cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Este uso general o débil de objeto es el que se hace también en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969).

- *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico[8] del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales, proponemos los siguientes tipos:

- *Global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el potencial sujeto, relativas a un objeto matemático.

- *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- *Logrado*: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

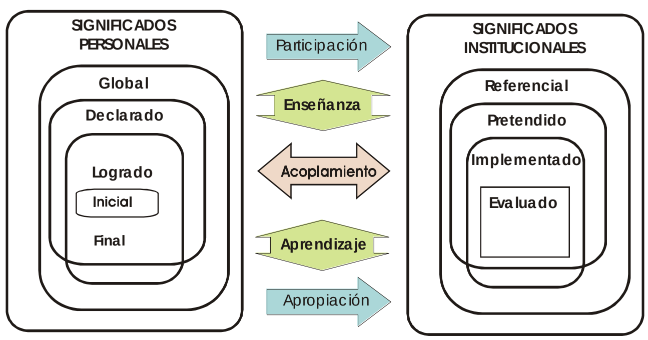


Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales

En la parte central de la figura 1 indicamos las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Asimismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

## Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso

[8] Wilhelmi, Lacasta y Godino (en prensa).

gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura[9]. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales"[10], mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como "objetos personales"[11]. La noción de emergencia se puede relacionar, desde el punto de vista de los objetos personales, con los procesos cognitivos que Sfard (1991) describe como interiorización, condensación y reificación, mientras que desde el plano institucional se relaciona con los procesos de comunicación, simbolización y regulación. La emergencia de los objetos también está relacionada con la metáfora ontológica (Lakoff y Núñez, 2000), que lleva a considerar acontecimientos, actividades, ideas y demás, como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.).

Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc.

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. También se amplía el "triángulo epistemológico" (Steinbring, 2006) (signo/símbolo, objeto/contexto de referencia, concepto), especialmente al problematizar la noción de concepto e interpretar el "objeto/contexto de referencia" en términos de

[9] "*El discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos*" (Sfard, 2000, p. 47).

[10] Esta formulación de los objetos institucionales concuerda con el modo de concebir los "objetos conceptuales culturales" en la semiótica cultural (Radford, 2006): "*Los objetos matemáticos son formas conceptuales de actividad reflexiva mediada histórica, social y culturalmente encarnada*" (p. 57).

[11] Los "objetos personales" incluyen a los constructos cognitivos, tales como concepciones, esquemas, representaciones internas, etc.

situaciones-problemas. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y referentes a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo –en el sentido de cada objeto–; dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.).

**Relaciones entre objetos: función semiótica**

Se adopta de Hjelmslev (1943) la noción de función de signo[12] como la dependencia entre un texto y sus componentes, y de estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (contenido, representado) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental[13] (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas.

El uso de las funciones semióticas permite un refinamiento de los análisis del significado en términos de prácticas. Las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos y del pensamiento que las acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

---

[12] Descrita por U. Eco como *función semiótica:*
*Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un* plano de la expresión *colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un* plano del contenido *(…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua*. (Eco, 1995, p.p. 83-84).

[13] Con las palabras no sólo se dicen cosas, sino que también se hacen (Austin, 1982).

## Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su doble versión, personal e institucional.

La constitución de estos objetos y relaciones (configuraciones), tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, los cuales son interpretados como "secuencias de prácticas". Los objetos matemáticos emergentes constituyen la cristalización o reificación resultante de tales procesos (dialéctica instrumento-objeto de Douady, 1986; dualidad objeto-proceso de Sfard, 1991).

Nuestra manera de interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, nos proporciona criterios para categorizarlos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.) y argumentación.

La *resolución de problemas* –y de manera más general, la *modelización*– debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (s*upervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos.

## Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a estos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas –según el juego de lenguaje en que participan– pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal-institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona, se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

- *Ostensivo-no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

- *Expresión-contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo-intensivo (ejemplar-tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (la familia de funciones $y = mx + n$, por ejemplo). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras *et al.*, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "*La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica*" (Otte, 2003, p. 187).

- *Unitario-sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se supone, son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, etc.) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos a través de los siguientes *procesos cognitivos/epistémicos:*

- institucionalización-personalización;
- generalización-particularización;
- análisis/descomposición-síntesis/reificación;
- materialización/concreción-idealización/abstracción;
- expresión/representación-significación.

En la figura 2 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales.

Las nociones teóricas descritas –sistemas de prácticas, instituciones, procesos, entidades emergentes, configuraciones, atributos contextuales, junto con la noción de función semiótica como entidad relacional básica– constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático.

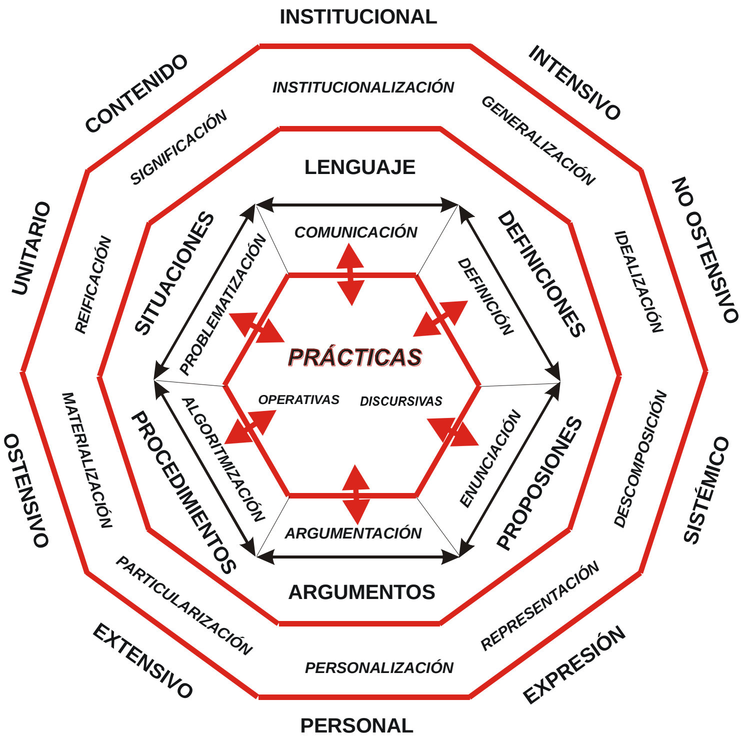


Figura 2. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos

## Comprensión y conocimiento en el EOS

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Godino, 2000; Font, 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender la comprensión, de entrada, como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional que se realiza en las prácticas matemáticas entre entidades o grupos de ellas, (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite también entender en el EOS la comprensión en términos de funciones semióticas (Godino, 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una función semiótica (o muchas), resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

## Recapitulación

En nuestras reflexiones teóricas iniciales sobre la naturaleza de las matemáticas nos preguntábamos qué es un objeto matemático[14] –por ejemplo, la media aritmética– y qué significa la expresión “media aritmética”. (Godino y Batanero, 1994). El uso que hacíamos en esta etapa de *objeto matemático* viene a ser equivalente a *concepto matemático* (idea o noción matemática)[15]. Adoptando una epistemología pragmatista-antropológica, establecimos como respuesta una función semiótica cuyo antecedente (significante) es el objeto matemático –o la expresión que lo designa– y el consecuente (significado), un nuevo constructo que describimos como el “*sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones-problemas*”. De esta manera se trata de superar la visión parcial y sesgada de los objetos matemáticos aportada por la perspectiva conceptualista/formalista en la que los objetos matemáticos se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos.

Con la finalidad de hacer operativas estas nociones para describir la actividad matemática, los “productos” resultantes de dicha actividad y los procesos de comunicación matemática, hemos procedido a una progresiva ampliación de la noción de objeto matemático y significado. *Objetos matemáticos* no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Asimismo, *significados* no son sólo “*los sistemas de prácticas*”, sino “*el contenido de cualquier función semiótica*”. Con este uso ampliado de *objeto* y *significado* se requiere, en cada circunstancia, especificar el tipo de objeto o de significado referido para que la comunicación pueda ser efectiva. Hablamos así de *objetos emergentes* de los sistemas de prácticas como resultantes de los procesos de definición (definiciones), argumentación (argumentos), etc.; *objetos relacionales* (funciones semióticas); *objetos personales* o *institucionales*; *objetos extensivos* o *intensivos*; etc.

Como respuesta final –abierta a revisión y refinamiento– a la cuestión epistemológica sobre la naturaleza y origen de los conceptos matemáticos, proponemos el par (*sistema de prácticas*, *configuración*), entendiendo, además, que tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones son relativas y dependientes de los atributos contextuales duales descritos en el subtítulo *Atributos contextuales* del presente título.

[14] Cuestiones similares se plantea Sfard (2000, p.p. 42-43): “*Los símbolos matemáticos refieren a algo, pero, ¿a qué? ... ¿Cuál es el estatus ontológico de estas entidades? ¿De dónde vienen? ¿Cómo podemos alcanzarlos (o construirlos)?*”

[15] En D’Amore (2001) se presenta un estudio extenso del debate sobre los conceptos y los objetos matemáticos. Asimismo, Otte (2003) analiza en qué sentido las matemáticas tienen objetos, enfatizando el papel esencial de la dualidad particular-general (que en nuestro caso designamos como extensivo-intensivo, o ejemplar-tipo).

Sin duda se trata de un modelo teórico complejo, pero se está revelando una herramienta potente y útil para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

**Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos**

El modelo teórico sobre la cognición que hemos descrito puede ser aplicado de manera más general a otros campos del saber, en particular a los saberes didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?
- ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?
- ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?
- ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?
- ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

En la Teoría de las Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006), sobre la que venimos trabajando, modelizamos la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional) con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una *configuración instruccional*, constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica. Estas nociones teóricas se complementan con la formulación de criterios de idoneidad de los procesos de instrucción matemática (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005), que pueden ayudar en el diseño, implementación y evaluación de tales procesos.

## Criterios de idoneidad didáctica

Las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción, que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006):

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad) o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).

- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.

- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos[16] potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1997) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

[16] Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (por ejemplo Cabri para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.

- *Idoneidad ecológica,* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo de la escuela y la sociedad, y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

Todas estas nociones las consideramos útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza. Los distintos elementos pueden interactuar entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo la epistémica, puede requerir de capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva, es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

En la figura 3 resumimos los criterios que componen la idoneidad didáctica.

Representamos mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular inscrito correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

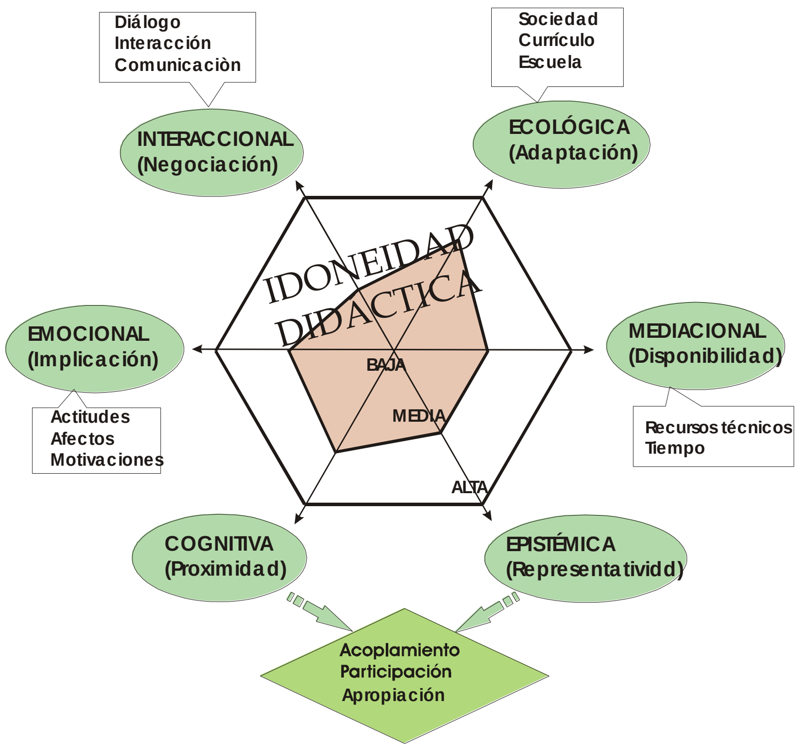


Figura 3. Componentes de la idoneidad didáctica

Las herramientas descritas se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o a un nivel más global, como puede ser el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser útiles para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas o "incidentes didácticos" puntuales.

## *Comparación con otros modelos teóricos*

En Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) analizamos diversos marcos teóricos usados en Didáctica de la Matemática desde el punto de vista del EOS, concretamente las nociones usadas para describir los fenómenos cognitivos y epistémicos en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1998), Teoría de los Campos Conceptuales (TCC, Vergnaud, 1990), Dialéctica Instrumento-Objeto y Juegos de Cuadros (DIO-JC, Douady, 1986), Teoría

Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 1992) y Registros de Representación Semiótica (RRS, Duval, 1995).

Incluimos a continuación una síntesis de las principales conclusiones obtenidas en dicho trabajo.

**Supuestos sobre la naturaleza del conocimiento matemático**

Consideramos que la naturaleza del saber matemático, en el sentido de saber "sabio" o saber en la institución matemática-profesional, no ha sido problematizada en las teorías discutidas. En la TAD, con la noción de praxeología y su dependencia de las instituciones, se atribuye una naturaleza relativa y plural al conocimiento matemático, como consecuencia de la adopción del marco antropológico, pero se continúa hablando de un "saber sabio" que se traspone a las instituciones de enseñanza, cuya naturaleza no se explicita.

¿Es posible compaginar de manera coherente el relativismo antropológico con la visión platónica usual que atribuye un tipo de realidad absoluta y universal al conocimiento matemático? En Wilhelmi, Lacasta y Godino (en prensa) abordamos esta cuestión desde el enfoque ontosemiótico analizando, como ejemplo, las diversas definiciones de la noción de igualdad de números reales y los subsistemas de prácticas asociadas a las mismas. Proponemos que cada definición y la configuración de objetos y relaciones entre los mismos constituyen un sentido –o significado parcial– de la noción de igualdad de números reales (perspectiva sistémica), y que en última instancia, el significado matemático de la noción, en singular (perspectiva unitaria), debemos asociarlo a la estructura formal que describe los diversos significados parciales. El saber matemático, en singular, es una emergencia del sistema de prácticas matemáticas, realizadas en el seno de una comunidad de prácticas especial (matemática pura), ante el problema de la organización y estructuración de los subsistemas de prácticas implementados en diversos marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguajes.

En el EOS la cuestión del "significado de los objetos matemáticos" es de naturaleza ontológica y epistemológica, esto es, se refiere a la naturaleza y origen de los objetos matemáticos. En un primer momento se propone una respuesta pragmática/antropológica —significado como sistema de prácticas operativas y discursivas—, pero simultáneamente se postula la emergencia de nuevos objetos de tales sistemas de prácticas que se concretan en reglas socialmente convenidas (y objetos personales), los cuales serán a su vez contenidos de nuevas funciones semióticas. Con esta formulación dualista –sistema de prácticas y objetos emergentes organizados en redes o configuraciones– se pretende articular los programas epistemológico (sobre bases antropológicas) y cognitivo (sobre bases semióticas).

Las visiones pragmática y realista sobre el significado, se suelen presentar como contrapuestas. Sin embargo, Ullmann (1962) presenta las teorías de tipo pragmático (que denomina operacionales o contextuales) como un complemento válido de las teorías de tipo realista (que denomina referenciales).

> *No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, se puede pasar con seguridad a la fase "referencial" y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro* (Ullmann, 1962, p.p. 76-77).

Esta observación de Ullmann sirve de apoyo para el modelo de significado de los objetos matemáticos que se propone en el EOS. El significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos referenciales. En el EOS, de acuerdo con la visión antropológica sostenida por Wittgenstein (Bloor, 1983), los componentes teóricos del conocimiento matemático (conceptos, teoremas) se interpretan como reglas gramaticales para el manejo de las expresiones usadas para describir el mundo de objetos y situaciones extra o intramatemáticas.[17]

**Relatividad ontosemiótica personal, institucional y contextual**

Las teorías analizadas dan un peso muy diferente al aspecto personal e institucional del conocimiento matemático y a su dependencia contextual. En el EOS se postula que los sistemas de prácticas, los objetos emergentes y las configuraciones mediante las cuales se expresan, son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein, 1953).

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto *O* se puede hacer de una manera global con la noción de "sistemas de prácticas personales". Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas, obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional. También se puede incorporar de esta manera la dualidad "instrumento-objeto" que propone Douady para los conceptos matemáticos.

[17] Esta es la manera en que se conciben los conceptos y teoremas en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Baker y Hacker, 1985).

Los modos de "hacer y de decir" ante un tipo de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el "objeto función", se proponen como respuesta a la pregunta "qué significa el objeto función" para un sujeto (o una institución). Esta modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales (intencionales) constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

En el EOS la noción de concepción es interpretada mediante el par (sistema de prácticas personales, configuración cognitiva) para sacar la cognición del sesgo mentalista. En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de "concepción" de un sujeto sobre un objeto *O* (o sostenida en el seno de una institución), asignemos como contenido "*el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto manifiesta en las que se pone en juego dicho objeto*". Este sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado, y se describe mediante la red de objetos y relaciones que se ponen en juego (*configuración cognitiva*).

Asimismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal-institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto *O* por un sujeto, se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de *O* por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

Cuando se considera el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el enfoque ontosemiótico, es posible distinguir entre *sentido* y *significado*. Se entiende el *sentido* como un *significado parcial*. El significado de un objeto matemático, entendido como conjunto de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto (que activará una determinada configuración). Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

La noción de representación y la de registro semiótico, usadas por Duval y otros autores, hacen alusión –según nuestro modelo– a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier clase de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos.

El uso que se hace en Teoría de Situaciones Didácticas de la noción de sentido, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y "le da su sentido" (podemos describirlo como "significado situacional"). Según el EOS, esta correspondencia es crucial, sin duda, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido en términos cognitivos o bien, en términos epistémicos.

La Teoría de los Campos Conceptuales extiende la noción de significado como “respuesta a una situación dada”, introducida en Teoría de Situaciones Didácticas. Esta extensión supone la inclusión, además, del componente situacional, de elementos procedimentales (esquemas) y discursivos (conceptos y teoremas en acto), relacionando además el significado con la noción de *modelo implícito*.

El contenido que se considera “*significado de un objeto matemático para un sujeto*” en la TCC, es prácticamente la globalidad holística que nosotros describimos como “sistema de prácticas personales”. Sin embargo, nuestra noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporcionan un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático.

**Niveles de análisis de la cognición matemática**

La didáctica debe identificar, no solo los fenómenos relativos a la ecología de los saberes matemáticos (objetivo principal de la TAD) o los correspondientes al diseño e implementación de ingenierías didácticas (objetivo principal de la TSD), sino también los fenómenos relativos al aprendizaje de los alumnos. En última instancia, los esfuerzos de los profesores e investigadores convergen en el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan, esto es, se apropien de los conocimientos matemáticos que les permitan desenvolverse en la sociedad y, en algunos casos, contribuyan al desarrollo de nuevos conocimientos. El abordaje de cuestiones como ¿por qué los alumnos tienen dificultades en resolver este tipo de tareas?, ¿es idónea esta tarea, este discurso matemático, para estos alumnos en unas circunstancias dadas?, etc., supone un nivel “microscópico” de análisis de fenómenos cognitivos y didácticos, y requiere usar nociones teóricas y metodológicas específicas.

Las nociones de esquema, conceptos y teoremas en actos que proponen la TCC y la RRS se orientan en esa dirección. Ahora bien, ¿son suficientes estas nociones para este aspecto del trabajo didáctico? Consideramos que la noción de “configuración cognitiva” que propone el EOS con su desglose en entidades situacionales, lingüísticas, procedimentales, conceptuales, proposicionales y argumentativas, permiten un análisis más fino del aprendizaje matemático de los estudiantes. La noción de configuración, en su versión epistémica, permite también hacer análisis microscópicos de los objetos matemáticos, caracterizar su complejidad ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad.

El EOS permite estudiar los hechos y fenómenos a nivel microscópico, incluso fenómenos que puede calificarse de singulares. ¿Qué ocurre aquí y ahora? ¿Por qué ocurre? ¿Qué aprende –o deja de aprender– este alumno en estas circunstancias? Aportar respuestas a estas cuestiones puede ser un primer paso para generar hipótesis referidas a otros alumnos y circunstancias. Para hacer este tipo de análisis, el EOS introduce las dualidades cognitivas: elemental-sistémica; ostensiva-no ostensiva; extensiva-intensiva; expresión-contenido (función semiótica).

Por otra parte, las nociones de sistema de prácticas (praxeología u organización matemática), instituciones, marcos y contextos de uso y ecología de significados, son nociones apropiadas para realizar análisis de tipo macroscópico (curricular, instruccional).

La noción de *conflicto semiótico*, cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa, es también útil para la realización tanto de análisis de nivel macro como de nivel microdidáctico en la producción y comunicación matemática.

## *Ejemplos de investigaciones*

En este apartado describimos de manera resumida dos ejemplos de investigaciones realizadas en el marco del EOS. Otros ejemplos de investigaciones experimentales realizadas desde la perspectiva ontosemiótica, publicadas en diversas tesis de doctorado, artículos y monografías, están disponibles en la página web del Grupo de Investigación de *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística* de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino; http://www.ugr.es/local/batanero, así como en la página web de V. Font: http://www.webpersonal.net/vfont/RDMfinal.pdf

### ***Caracterización del razonamiento combinatorio elemental***

En el artículo de Godino, Batanero y Roa (2005), publicado en *Educational Studies in Mathematics* (volumen 60, nº 1, p.p. 3-36), se describen las principales nociones teóricas del EOS con ejemplos relativos al campo de problemas de combinatoria elemental y se analizan las respuestas dadas por cuatro estudiantes de último curso de la licenciatura de matemáticas a un problema de combinatoria.

Los tipos de objetos matemáticos (problemas, lenguaje) y las facetas cognitivas (extensivo-intensivo, ostensivo-no ostensivo) se usan para desarrollar la técnica de análisis ontosemiótico que permite caracterizar los significados institucionales (respuestas a los problemas elaboradas desde un punto de vista experto) y los significados personales de los estudiantes.

En este artículo se utilizan datos de la tesis doctoral de Roa (2000) correspondientes a las respuestas de cuatro sujetos a uno de los problemas propuestos. En la investigación se aplicó un cuestionario formado por 13 problemas combinatorios elementales (11 problemas que ponen en juego solo una operación combinatoria y 2 problemas compuestos en los que intervenían dos operaciones). Este cuestionario se aplicó a una muestra de 90 estudiantes con preparación matemática avanzada y se analizó utilizando técnicas cuantitativas y cualitativas (estudio de casos mediante entrevistas).

El análisis realizado permite identificar los conocimientos puestos en juego por los alumnos –correcta o incorrectamente– en la resolución del siguiente problema:

> *Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.*

Los resultados pusieron de manifiesto la complejidad de la tarea de resolución de este problema, aparentemente sencillo, así como la diversidad entre los cuatro alumnos, lo que refleja una variedad del significado (sistémico) de la combinatoria elemental para los mismos. En el proceso de resolución se producen conflictos semióticos que llevan a error, debido a la disparidad entre el modelo de selección en que estos alumnos han aprendido las definiciones combinatorias y las diversas situaciones (como, por ejemplo, en un problema de partición) en que deben ser aplicadas dichas definiciones.

Del análisis de los protocolos de resolución de este problema por los cuatro alumnos, se infiere que la actividad de resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos matemáticos; estos objetos varían de uno a otro alumno. Aunque, debido a las restricciones de espacio el artículo sólo incluye el análisis de un problema, este mismo proceso fue repetido con los 12 problemas restantes, poniendo de manifiesto la pluralidad de conocimientos usados por los alumnos en la solución de los problemas, que para cada uno de ello constituye el *significado personal* (sistémico) de la combinatoria elemental.

### *El problema de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada*

Describimos la investigación realizada en la tesis doctoral de V. Font, en el marco teórico del enfoque ontosemiótico, sobre cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada por estudiantes de bachillerato (16-17 años). Usaremos como referencia el artículo publicado en *Recherches en Didactique des Mathématics,* (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), con el título *Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal*.

En este trabajo se usa la noción de “significado institucional” entendido como sistema de prácticas, para diseñar, implementar y analizar una experiencia de estudio de la derivada, distinguiendo cuatro tipos de tales significados sistémicos: de referencia, pretendido, implementado y evaluado. También se recoge información detallada de las prácticas personales de los estudiantes, que permiten caracterizar sus significados propios iniciales, finales y algunos aspectos de su construcción progresiva.

Entre las conclusiones sobre el desarrollo y análisis de la experiencia de enseñanza, destacan las siguientes:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, llevan a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil hacerlas compatibles con las restricciones materiales y temporales reales.

- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.

- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.

- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas [de $f(x)$ o de $f'(x)$], modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

La noción de función semiótica, junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo, expresión-contenido, son utilizadas de manera sistemática para analizar la complejidad ontosemiótica de la definición de derivada en un punto y función derivada. Este análisis permite identificar conflictos semióticos potenciales –que son tenidos en cuenta en el diseño de la experiencia– y como explicación de algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

## *Reflexiones finales*

Concebimos las teorías como instrumentos que permiten definir los problemas de investigación así como una estrategia metodológica para su abordaje. El sistema de nociones teóricas y metodológicas que necesitamos elaborar para caracterizar los fenómenos didácticos, deberá permitir diferentes niveles de análisis de las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este sistema no puede elaborarse con la simple agregación de elementos teóricos y metodológicos de distintos enfoques disponibles, sino que será necesario diseñar otros nuevos más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancias y conservando una consistencia global. Debemos aspirar a incluir en dicho sistema las nociones teóricas y metodológicas “necesarias y suficientes” para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El EOS viene creciendo como marco teórico para la didáctica de las matemáticas impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la aspiración de articular las diversas dimensiones y perspectivas implicadas. Este trabajo de articulación no puede hacerse mediante la superposición de herramientas de distinta procedencia. Steiner (1990) sitúa la disciplina Educación Matemática en el centro de un sistema social, heterogéneo y complejo –el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas– y menciona como ciencias referenciales para nuestra disciplina a la propia matemática, la epistemología, psicología, pedagogía, sociología, lingüística, entre otras. Cada una de estas disciplinas se ocupa de aspectos parciales de los problemas que plantea la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, usando para ello sus propias herramientas conceptuales y metodológicas.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual.

Consideramos que el EOS puede ayudar a comparar los marcos teóricos usados en Didáctica de las Matemáticas y, en cierta medida, a superar algunas de sus limitaciones para el de análisis de la cognición e instrucción matemática. En principio, se trata de una expectativa que se basa en la generalidad con la que se define en el EOS las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona-institución; elemental-sistémico; ostensivo-no ostensivo; extensivo-intensivo; expresión-contenido). Estas nociones nos permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases que describimos como ontosemióticas.

El papel central dado en el EOS a la *práctica* matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuyen a dicha noción (acción compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales) permiten, en nuestra opinión, una articulación coherente con otras posiciones teóricas, como el constructivismo social (Ernest, 1998), la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003) y en general las perspectivas etnomatemáticas y socioculturales en educación matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001).

**Reconocimiento:**

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación y Fondos FEDER. Madrid.

## *Referencias bibliográficas*

Anderson, M.; Sáenz-Ludlow, A.; Zellweger, S. y Cifarelli, V. C. (Eds). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing.* Otawa: Legas.

Atweh, B.; Forgasz, H. y Nebres, B. (2001). *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London: Lawrence Erlbaum.

Austin, J. L. (1982). *Cómo hacer cosas con palabras: palabras y acciones.* Barcelona: Paidós.

Baker, G. P. y Hacker, P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the philosophical investigations*. Glasgow: Basil Blackwell.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *El interaccionismo simbólico: perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Contreras, A. ; Font, V. ; Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición “ingenua” en una teoría “realista” “versus” el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, 51-76.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1976.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 2, 1-14.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI.

*Font, V. (2001).* Processos mentals versus competència, *Biaix 19*, 33-36

*Font, V. (2002).* Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, *7(2)*, 127-170.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-33.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 3-36.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En: A. Olivier y K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, *134*, 181-216.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers,* vols. 1-8, C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, Ch. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematicas*, *61*(1-2), 39-65.

Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 1-10.

Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general*. Madrid: Alianza, 1991.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being–Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En: P. Cobb; E. Yackel y K. McCain (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classroom* (37- 97). London: LEA.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop *et al.* (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 133-162.

Steiner, H. G. (1984). Balacheff, N. *et al*. (Eds.) *Theory of mathematics education (TME). ICME 5*. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, Vol 5. No. 2, 11-17.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar, 1978.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(2,3), 133-170.

Wilhelmi, M. R.; Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77-120.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.